(10) $\rbrack$ X — банахово $\Rightarrow$ в нём $\forall$ фундам. послед-ть сходится к элементу из X. $\rbrack$ L — подпространство, значит, оно замкнутое (по опред.), и $\forall$ послед-ть в L сходится к элементу из L. Кроме того, $\forall$ фундам послед-ть в L сходится, т.к. $L \subset X$, + оно наследует норму X.
$\Rightarrow$ L — банахово.

① Теорема Рисса (см. линал, 2$^{\text{й}}$ семестр)
Во всяком конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

$$\left(\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \text{, если } \exists a, b : \forall x \quad a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1 \right)$$

② $\forall x \in E$ (E-конечном.) $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \qquad |\lambda_k| \le C\|x\|$

Д-во $\quad |\lambda_k| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2} = \|x\|_2 \le C\|x\|$

т. Рисса

③ Конечномерное нормированное пр-во полно.

$\{x_m\}$ – фунд., $x_m = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m e_k \in E$, рассм. $x_n - x_m$. По ② $\Rightarrow$

$\Rightarrow |\lambda_k^n - \lambda_k^m| \le C\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0 \Rightarrow \{\lambda_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ – фунд. $\Rightarrow \{\lambda_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ – полн. $\Rightarrow$

$\mathbb{R}$-полное

$\Rightarrow \lambda_k^n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_k \Rightarrow$ (покоорд. сх. $\Leftrightarrow$ сх. по норме) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^m \to x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$

④ Собственно, сама задача.

L-лин. многообр. $\{x_n\} \to x \in H$, $x_n \in L$. $\{x_n\}$-сход $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{x_n\}$-фунд, но $\{x_n\} \subset L \Rightarrow \exists x' : x_n \to x'$, $x' \in L$ ($x' = \sum \lambda_k e_k$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{x_n\} \to x \in H$, $\{x_n\} \to x' \in L$ $\Rightarrow x = x' \Rightarrow \{x_n\} \to x \in L \Rightarrow L$-замк.

ч.т.д.

№5.

Усл: $L \subset X$, $L \neq X$. Док-ть $\overline{\exists}\, a, r$: $B(a,r) \subset L$.

$\square$:

$\rceil\ \exists\ B(a,r) \subset L$. Так как $L \neq X$, то $\exists\, x \in X, x \notin L$.

Тогда $\frac{x}{\alpha}$ и $\frac{x}{\alpha} + a \notin L$ (иначе лин. комб получаем, что $x \in L$), где $\alpha \neq 0$, $a \in L$. Покажем, что ~~$\frac{x}{\alpha} + a \in B$~~

$\frac{x}{\alpha} + a \in B(a,r)$ для ~~некот~~ $\alpha = \frac{2\|x\|}{r}$:

$\left\| \frac{x}{\frac{2\|x\|}{r}} + a - a \right\| < r$, $\Rightarrow$ $\frac{r}{2} < r$ - верно, $\Rightarrow$

$\frac{x}{\frac{2\|x\|}{r}} + a \in B(a,r)$, но $\frac{x}{\frac{2\|x\|}{r}} + a \notin L$, при этом

$B(a,r) \subset L$, $\Rightarrow$ имеем противорение, $\Rightarrow$

$\overline{\exists}\, B(a,r) \subset L$.

№14

① M - многообразие, т.к. $x \in M, y \in M$ $\alpha x + \beta y$: $\sum_{k=1}^{n} \alpha x_k + \sum_{k=1}^{n} \beta y_k = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in M$.

② Замкнутость M отн. нормы в l_2

$\{x^k\} \to x \Rightarrow \|x^k - x\| \to 0 \Rightarrow \sum_{p=1}^{\infty} (x_p^k - x_p)^2 \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n} (x_p^k - x_p)^2 + \sum_{p=n+1}^{\infty} (x_p^k - x_p)^2 \to 0 \Rightarrow \sum_{p=1}^{n} (x_p^k - x_p)^2 \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_p^k \to x_p \Rightarrow \sum_{p=1}^{n} x_p^k \to \sum_{p=1}^{n} x_p$, но $\sum_{p=1}^{n} x_p^k \equiv 0 \Rightarrow \sum_{p=1}^{n} x_p = 0 \Rightarrow x \in M$.

③ Найдем L: $M \oplus L = l_2$.

$\boxed{\text{лемма 1, §10}}$

Рассм. линейный ф-л: $f(x) = \sum_{p=1}^{n} x_p$.

$M = \ker f$, но $\dim(\ker f)^{\perp} = 1 \Rightarrow \dim L = 1$.

$y = (\underbrace{1 1 \ldots 1}_{n \text{ раз}} 0 0 \ldots) \perp M$, $\alpha y \perp M \Rightarrow \{\alpha y \ \forall \alpha\} \perp M$, $\dim\{\alpha y\} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow L = \{\alpha y\}$

№6. $\exists L$ - конечномер. многообр., $L \subset X$ - лин. норм. пр-во;

$L = \mathcal{L}(x_1', \dots, x_n')$, т.е. $\forall x \in L$: $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i'$

$x, y \in L \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L$

Необх. показать, что L замкн. отн-но сх-сти по норме

$\exists x_n \in L$; $x_n \to y$, $n \to \infty$, т.е. $\|x_n - y\| \to 0$, $n \to \infty$

Сл-но, $\|x_n - x_m\| \le \|x_n - y\| + \|x_m - y\| \to 0$, $n, m \to \infty$, т.е.

$\{x_n\}$ - фундаментальна

Имеем $x_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{k_i} x_i'$; $x_k \in L$, $\forall k$.

Рассмотрим сужение нормы $\|\cdot\|$ пр-ва X на мн-во L:

ясно, что все аксиомы нормы выполнены, и это сужение является нормой на L.

Но L - конечномерное пр-во $\Rightarrow$ $\forall$ 2 нормы в нём эквивалентны,

т.е. $\exists C_1, C_2 = const$:

$C_2 \|x_n - x_m\|_2 \le \|x_n - x_m\| \le C_1 \|x_n - x_m\|_2$, где $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}$,

где $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

Сл-но, из $\|x_n - x_m\| \to 0$, $n, m \to 0$ $\Rightarrow$ $\|x_n - x_m\|_2 \to 0$, $n, m \to \infty$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Имеет место покоорд. сх-сть, т.е. $\alpha_{k_1} \to \alpha_1', \dots, \alpha_{k_n} \to \alpha_n'$

при $n \to \infty$, т.е. $\exists$ эл-т $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' x_i'$, $y \in L$, т.что

$\|x_n - y\|_2 \to 0 \Rightarrow \|x_n - y\| \to 0$, т.е. $\{x_n\} \to y \in L$, $n \to \infty$,

а известно, что предел сходящ. посл-сти единственен.

Сл-но, предел $\{x_n\}$ действит. принадлежит L, что и требовалось.

№21. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t e^{-|s-t|} x(s)\,ds$; $\exists$ ли A^{-1} - ?

рассм. $x(t)$, т.что $Ax(t) = 0$: $0 \equiv \int_0^t e^{s-t} x(s)\,ds = e^{-t} \int_0^t e^{s} x(s)\,ds$,

что возможно т. и т.т., когда $\int_0^t e^{s} x(s)\,ds = 0$, $\forall t$.

~~x(s)~~ $\exists$ $\exists$ такое $s_1 \in [0,1]$: $x(s) > 0$ (для опр.) $\Rightarrow$ $\exists$ такое $\delta > 0$, что на $[s_1-\delta; s_1+\delta]$, $x(s) \geq \varepsilon \Rightarrow \int_{s_1-\delta}^{s_1+\delta} x(s)e^s ds = \ldots > 0$,

но при этом $\int_{s_1-\delta}^{s_1+\delta} \ldots = \int_0^{s_1+\delta} \ldots - \int_0^{s_1-\delta} \ldots = 0$ - противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) \equiv 0}}$.

Сл-но, $\nexists\, x_1(t) \neq x_2(t): Ax_1 = Ax_2$, т.е. $\exists$ оператор A^{-1}

№22. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau + x(t)$

A.) $N(A) = \ker A$, $N(A) = \{0\}$ - ?

$\exists x(t): Ax(t) = 0 = \int_0^t x(\tau)d\tau + x(t)$ (1)

Обозн. $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$; $y(0) = 0 \Rightarrow$ (1) перепишем в виде:

$$y(t) + y'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y(t) = Ce^{-t} \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow C = 0$$

значит, $y(t) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x(t) = 0}}$

B.) A^{-1} - ?; огранич.

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau + x(t) = z(t), \quad z(t) \in C[0,1]$$

Обозн. $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$; $y(0) = 0 \Rightarrow$

$$y(t) + y'(t) = z(t)$$

$$y(t) = c(t)e^{-t}$$

$$y' = c'e^{-t} - ce^{-t}$$

$$c'e^{-t} = z(t) \Rightarrow (\text{т.к. } y(0) = 0;\ y(t) = c(t)e^{-t}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(t) = \int_0^t e^{\tau} z(\tau)d\tau$$

Т.е. имеем $y(t) = c(t)e^{-t} = \int_0^t e^{\tau-t} z(\tau)d\tau$

$$x(t) = y'(t) = z(t) - \int_0^t e^{\tau-t} z(\tau)d\tau$$

Т.е. $A^{-1}z(t) = z(t) - \int_0^t e^{\tau-t} z(\tau)d\tau$

$\|A^{-1}z(t)\| \leq \|z(t)\| + \|\int_0^t \underbrace{e^{\tau-t}}_{\leq 1} z(\tau)d\tau\| \leq \|z(t)\| + \|z(t)\| = 2\|z(t)\|$

Сл-но, A^{-1} - огр.

№23. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds$

Имеет обр. -?

Для док-ва того, что $\exists$ обр., $\Leftrightarrow$ $\ker A = \{\Theta\}$ (т.к. пр-во явл. Банаховым)

$\exists x(t)$: $x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds = 0$ $\quad$ = const, не зависит от t

т.е. $x(t) = -e^t \int_0^1 e^s x(s)\,ds$, т.е. $x(t) = Ce^t$, где

$C = \text{const} = -\int_0^1 e^s x(s)\,ds$

Тогда $Ce^t + \int_0^1 e^{s+t} \cdot C \cdot e^s\,ds = 0$

$$Ce^t \left(1 + \int_0^1 e^{2s}\,ds\right) = 0 \Rightarrow \boxed{C = 0}, \text{ т.е. } \boxed{x(t) \equiv 0}$$

т.е. $\exists$ обр. оператор

подст. для нахождения C:

A^{-1}-?: $x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds = y(t) \Rightarrow x(t) = y(t) - Ce^t$, где C-?

$$\cancel{y(t)} - Ce^t + \int_0^1 e^{s+t}\left(y(s) - Ce^s\right)ds = \cancel{y(t)}$$

$$Ce^t = e^t \int_0^1 e^s \left(y(s) - Ce^s\right)ds$$

$$C = \int_0^1 e^s y(s)\,ds - C\int_0^1 e^{2s}\,ds$$

$$C = \frac{\int_0^1 e^s y(s)\,ds}{1 + \int_0^1 e^{2s}\,ds} = \frac{\int_0^1 e^s y(s)\,ds}{1 + \frac{e^2-1}{2}}$$

т.е. $$A^{-1} y(t) = y(t) - \frac{\int_0^1 e^s y(s)\,ds}{1 + \frac{e^2-1}{2}} \cdot e^t$$

$$\|A^{-1} y(t)\| \le \|y(t)\| + \|e^t\| \cdot \frac{\|y(t)\| \cdot (e-1)}{1 + \frac{e^2-1}{2}} < 2\|y(t)\|$$

№24. X-компл. лин. пр-во; $f \not\equiv 0$, т.е. $\exists \alpha \in \mathbb{C}$, $\exists x \in X$, $|\alpha| \ne 0$:

$f(x) = \alpha$

Сл-но, $\forall \beta \in \mathbb{C}$, имеем $\frac{\beta}{\alpha} x \in X$ (т.к. лин. пр-во);

$f\left(\frac{\beta}{\alpha} x\right) = \frac{\beta}{\alpha} f(x) = \beta$, т.е. $\underline{\operatorname{Im} f = \mathbb{C}}$

№23. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds$

Имеет обр. –?

Для док-ва того, что $\exists$ обр., $\Leftrightarrow$ $\ker A = \{\theta\}$ (т.к. пр-во явл. Банаховым)

$\exists x(t)$: $x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds = 0$ = const, не зависит от t

т.е. $x(t) = -e^t \int_0^1 e^s x(s)\,ds$, т.е. $x(t) = Ce^t$, где $C = \text{const} = -\int_0^1 e^s x(s)\,ds$

тогда $Ce^t + \int_0^1 e^{s+t} \cdot C \cdot e^s\,ds = 0$

$$Ce^t \left(1 + \int_0^1 e^{2s}\,ds\right) = 0 \Rightarrow \boxed{C=0}, \text{ т.е. } \boxed{x(t) \equiv 0}$$

т.е. $\exists$ обр. оператор

подст. для нахождения C:

A^{-1} –?: $x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s)\,ds = y(t) \Rightarrow x(t) = y(t) - Ce^t$, где C –?

$$\cancel{y(t)} - Ce^t + \int_0^1 e^{s+t}\left(y(s) - Ce^s\right)ds = \cancel{y(t)}$$

$$Ce^t = e^t \int_0^1 e^s \left(y(s) - Ce^s\right)ds$$

$$C = \int_0^1 e^s y(s)\,ds - C\int_0^1 e^{2s}\,ds$$

$$C = \frac{\int_0^1 e^s y(s)\,ds}{1 + \int_0^1 e^{2s}\,ds} = \frac{\int_0^1 e^s y(s)\,ds}{1 + \frac{e^2-1}{2}}$$

$$\text{т.е. } A^{-1}y(t) = y(t) - \frac{\int_0^1 e^s y(s)\,ds}{1 + \frac{e^2-1}{2}} \cdot e^t$$

$$\|A^{-1}y(t)\| \le \|y(t)\| + \|e^t\| \cdot \frac{\|y(t)\| \cdot (e-1)}{1 + \frac{e^2-1}{2}} < 2\|y(t)\|$$

№24. X – компл. лин. пр-во; $f \not\equiv 0$, т.е. $\exists \alpha \in \mathbb{C}$, $\exists x \in X$, $|\alpha| \neq 0$:

$f(x) = \alpha$

Сл-но, $\forall \beta \in \mathbb{C}$, имеем $\frac{\beta}{\alpha} x \in X$ (т.к. лин. пр-во);

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}x\right) = \frac{\beta}{\alpha} f(x) = \beta, \text{ т.е. } \underline{\operatorname{Im} f = \mathbb{C}}$$